CP n° 2 - Calcul algébrique

1 Sommes et produits

1.1 Définitions et propriétés élémentaires

Définition (symboles $\sum$ et $\prod$)**.** *Soit I un ensemble fini non vide et $(a_i)_{i\in I}$ une famille de nombres (réels, voire complexes). On note :*

- $\sum_{i\in I} a_i$ *la* ***somme*** *des éléments de la famille $(a_i)_{i\in I}$,*
- $\prod_{i\in I} a_i$ *le* ***produit*** *des éléments de la famille $(a_i)_{i\in I}$.*

Remarque. *Par convention :*
- *la somme sur un ensemble vide vaut 0 (élément neutre pour $+$) ;*
- *le produit sur un ensemble vide vaut 1 (élément neutre pour $\times$).*

Cas particulier fondamental : si I est un intervalle d'entiers $I = [\![m, n]\!]$ (ensemble des entiers compris entre m et n), où $m, n \in \mathbb{Z}$ tels que $m \leqslant n$, la somme $\sum_{i\in I} a_i$ se note $\sum_{i=m}^{i=n} a_i$ et même plutôt $\boxed{\sum_{i=m}^{n} a_i}$ et vaut donc

$$\sum_{i=m}^{n} a_i \;=\; a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_n$$

Le produit se note $\boxed{\prod_{i=m}^{n} a_i} = a_m \times a_{m+1} \times a_{m+2} \times \cdots \times a_n$.

Remarque. *L'indice i de la somme est dit « muet » :*
- *il n'a de sens qu'à l'intérieur de la somme,*
- *il peut être remplacé par n'importe quel autre symbole.*

Exemple : $\sum_{i=1}^{n} 3i+2 = \sum_{k=1}^{n} 3k+2 = \sum_{s=1}^{n} 3s+2$, exactement comme $\int_0^1 (x^2 - e^x)\mathrm{d}x = \int_0^1 (t^2 - e^t)\mathrm{d}t$.

Premiers exemples de sommes calculables : Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- **Constantes :** $\sum_{k=1}^{n} 28 = n \times 28$ car c'est $\underbrace{28 + 28 + \cdots + 28}_{n \text{ fois}}$.

  ⚠ $\sum_{k=0}^{n} 28 = (n+1) \times 28$ et si $m \leqslant n$, $\underbrace{\sum_{k=m}^{n} 28 = (n-m+1) \times 28.}_{\text{y réfléchir}}$

De même, si $z \geqslant 0$ et $x \in \mathbb{R}$: $\sum_{j=1}^{n} \underbrace{\frac{e^{3x^2}}{\sqrt{z+42}}}_{\text{ne dépend pas de } j} = n \times \frac{e^{3x^2}}{\sqrt{z+42}}$.

▶ **Somme des premiers entiers naturels :** $\boxed{\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}}$ (par coeur)

car c'est $1+2+3+\cdots+n$ (voir le chapitre précédent pour la preuve).

▶ **Somme des premiers carrés :** $\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2+2^2+\cdots+n^2 = \boxed{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$

dem : voir exercice très prochainement.

▶ **Progression géométrique :** Si $q \in \mathbb{C}\setminus\{1\}$ (⚠ bien retenir que $q \neq 1$), on a

$$\sum_{k=0}^{n} q^k \;=\; 1+q+q^2+\cdots+q^n \;=\; \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Plus généralement, si $m, n \in \mathbb{Z}$ avec $m \leqslant n$, on a

$$\sum_{k=m}^{n} q^k \;=\; \boxed{\frac{q^m - q^{n+1}}{1-q}} \;=\; \frac{\text{(1er terme écrit) - (1er terme non écrit)}}{1-\text{(la raison)}}. \quad \text{(par coeur)}$$

dem : ♥ Fixons $q \neq 1$ et notons $S_{m,n} := \sum_{k=m}^{n} q^k$.

On a

$$S_{m,n} \;=\; \boxed{q^m} + q^{m+1} + \cdots + q^{n-1} + q^n$$

donc

$$qS_{m,n} \;=\; q^{m+1} + q^{m+2} + \cdots + q^n + \boxed{q^{n+1}}$$

et donc en simplifiant les termes communs des deux sommes :

$$S_{m,n} - qS_{m,n} \;=\; q^m - q^{n+1}$$

D'où

$$(1-q)S_{m,n} \;=\; q^m - q^{n+1} \qquad \text{et donc} \qquad S_{m,n} = \frac{q^m - q^{n+1}}{1-q} \qquad (1-q \neq 0 \text{ car } q \neq 1)$$

Remarque. *Il existe des formules pour* $\sum_{k=1}^{n} k^2$, $\sum_{k=1}^{n} k^3$, *etc... mais* ***pas*** *pour* $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$, *etc.*

Propriétés (Linéarité de la somme)**.** *Soit I un ensemble fini, $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_i)_{i\in I}$ deux familles de nombres. On a :*

1. $\sum_{i\in I}(a_i+b_i) = \left(\sum_{i\in I} a_i\right) + \left(\sum_{i\in I} b_i\right)$.
2. $\forall \lambda \in \mathbb{C}, \sum_{i\in I} \lambda a_i = \lambda \sum_{i\in I} a_i$.

dem :

1. Simple regroument de termes, les a_i d'un côté, les b_i de l'autre.
2. Factorisation : $\lambda a_1 + \lambda a_2 + \cdots + \lambda a_n = \lambda(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$

Cf exo 1

Propriétés (Propriétés du produit)**.**

1. $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, $\prod_{i\in I} \lambda = \lambda^n$, *où* n *est le nombre d'éléments de* I, *car c'est* $\underbrace{\lambda \times \lambda \times \cdots \times \lambda}_{n fois}$.
2. $\prod_{i\in I} a_i b_i = \left(\prod_{i\in I} a_i\right)\left(\prod_{i\in I} b_i\right)$ *(simple regroupement de facteurs).*
3. $\prod_{i\in I} \lambda a_i = \lambda^n \left(\prod_{i\in I} a_i\right)$ *car c'est* $(\lambda a_1) \times (\lambda a_2) \times \cdots \times (\lambda a_n)$.

Remarque. *La propriété* $e^{a+b} = e^a e^b$ *se généralise à une famille de réels* $a_1, \ldots, a_n$ *:*

$$\exp\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) = \prod_{i=1}^{n} e^{a_i}.$$

De même, $\forall\, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}_+^*$ *:* $\ln\left(\prod_{i=1}^{n} b_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \ln(b_i)$.

1.2 Techniques classiques

1.2.1 Technique 1 : sommes et produits télescopiques

Intéressons-nous à la somme $\sum_{k=1}^{n} (k+1)^3 - k^3$. En écrivant les termes un par un, elle vaut :

$$\begin{aligned}
&\cancel{2^3} - 1^3 && \text{(terme en } k=1\text{)}\\
+&\cancel{3^3} - \cancel{2^3} && \text{(terme en } k=2\text{)}\\
+&\cancel{4^3} - \cancel{3^3} && \text{(terme en } k=3\text{)}\\
+&\cancel{5^3} - \cancel{4^3} && \text{(terme en } k=4\text{)}\\
+&\ \vdots && \vdots\\
+&\cancel{n^3} - \cancel{(n-1)^3} && \text{(terme en } k=n-1\text{)}\\
+&(n+1)^3 - \cancel{n^3} && \text{(terme en } k=n\text{)}
\end{aligned}$$

Après simplification, il reste : $\sum_{k=1}^{n} (k+1)^3 - k^3 = (n+1)^3 - 1$

De façon générale, si $(u_k)_{k\in[\![m,n]\!]}$ est une famille de nombres,

$$\sum_{k=m}^{n} (u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_m.$$

On parle alors de somme télescopique.

Exemple :

$$\sum_{k=1}^{n} \underbrace{\frac{e^{2(k+1)}}{(k+1)^2}}_{u_{k+1}} - \underbrace{\frac{e^{2k}}{k^2}}_{u_k} = \frac{e^{2(n+1)}}{(n+1)^2} - \frac{e^2}{1^2}$$

De même :

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{e^{(k+1)^2}}{e^{k^2}} = \frac{e^{(n+1)^2}}{e^{1^2}} \qquad \text{car c'est} \qquad \frac{\cancel{e^{2^2}}}{e^{1^2}} \times \frac{\cancel{e^{3^2}}}{\cancel{e^{2^2}}} \times \frac{\cancel{e^{4^2}}}{\cancel{e^{3^2}}} \cdots \times \frac{e^{(n+1)^2}}{\cancel{e^{n^2}}}$$

On parle ici de produit télescopique.

Cf exo 2

Application : formule de factorisation de $a^n - b^n$ par $(a-b)$.

$$\forall\, a, b \in \mathbb{C},\ \forall\, n \in \mathbb{N}^*, \qquad \boxed{a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}}$$

Exemple : $a^4 - b^4 = (a-b)(b^3 + ab^2 + a^2 b + a^3)$.

dem : On vérifie

$$\begin{aligned}
(a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} &= \sum_{k=0}^{n-1} (a-b) a^k b^{n-1-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{a^{k+1} b^{n-1-k}}_{=a^{k+1}b^{n-(k+1)}} - a^k b^{n-k} \\
&= a^n b^0 - a^0 b^n \quad \text{(somme télescopique)} \\
&= a^n - b^n.
\end{aligned}$$

Exercice :

1. Écrire la factorisation de $a^3 - b^3$ par $a - b$.
2. Idem pour $a^5 - b^5$.
3. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 2$, $n^3 + 1$ n'est pas un nombre premier.

Remarques.

- *Pour $n = 2$, on retrouve l'identité $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$.*
- *Pour $b = 1$ et $a \neq 1$, cela donne*
$$a^n - 1 = (a-1)\sum_{k=0}^{n-1} a^k, \text{ c'est-à-dire } \sum_{k=0}^{n-1} a^k = \frac{1-a^n}{1-a}, \text{ que l'on connaissait déjà.}$$

1.2.2 Technique 2 : changement d'indice

Intéressons-nous à une somme $\sum_{k=m}^{n} a_k$, où les $a_m, \ldots, a_n$ sont des nombres. L'intervalle d'entiers $[\![m, n]\!]$ peut être décrit en utilisant d'autres paramétrages, comme par exemple :

$$[\![m, n]\!] \ = \ \{k \mid k \in [\![m, n]\!]\} \ = \ \{i + 3 \mid i \in [\![m-3, n-3]\!]\}$$

On a alors l'égalité de sommes :

$$\sum_{k=m}^{n} a_k \ = \ \sum_{i=m-3}^{n-3} a_{i+3}$$

Cette égalité s'obtient directement en faisant le changement d'indice $i = k - 3$ (ou $k = i + 3$) par les deux étapes suivantes :

- changement des bornes : k va de m à n donc $i = k - 3$ va de $m - 3$ à $n - 3$;
- on remplace mécaniquement k par $i + 3$ dans le corps de la somme.

⚠ Ces deux substitutions se font **simultanément**. k et i ne doivent jamais cohabiter.

Exercice : appliquer les changements d'indice $i = k + 2$ et $j = k - n$ à la somme $S = \sum_{k=n}^{2n} \frac{e^{2k+1}}{k\sqrt{k+3}}$.

Application aux sommes de progressions arithmétiques : ♥ Soit $m, n \in \mathbb{Z}$ tels que $m \leqslant n$. Calculer $A_{m,n} = \sum_{k=m}^{n} k$.

⚠ L'indice d'une somme décrit des valeurs entières consécutives. Donc un changement d'indice doit utiliser une fonction qui envoie un intervalle d'entiers consécutifs sur un intervalle d'entiers consécutifs (de façon bijective). Par exemple :

- le changement d'indice $i = \dfrac{k}{3}$ est impossible (on obtient des non-entiers) ;
- le changement d'indice $i = 2k$ est impossible (on obtient des entiers mais non-consécutifs).

En revanche, la fonction n'a pas à être croissante. Typiquement, les changements d'indices du type

$$i = -k + \text{Cste}$$

sont possibles. Ils "retournent" l'intervalle d'entiers au sens où la plus petite valeur de k correspond à la plus grande valeur de i, et inversement.
Exemple avec $i = n - k$ (ou $k = n - i$) :

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{i=0}^{n-1} a_{n-i}$$

Cf exo 4

Remarque. *La formule de télescopage* $\sum_{k=m}^{n} (u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_m$ *peut se prouver à l'aide d'un changement d'indice :*

$$\begin{aligned}
\sum_{k=m}^{n} (u_{k+1} - u_k) &= \left(\sum_{k=m}^{n} u_{k+1}\right) - \left(\sum_{k=m}^{n} u_k\right) \\
&= \left(\sum_{i=m+1}^{n+1} u_i\right) - \left(\sum_{k=m}^{n} u_k\right) \qquad \textit{(chgt d'indice } i = k+1\textit{)} \\
&= \left(\sum_{k=m+1}^{n+1} u_k\right) - \left(\sum_{k=m}^{n} u_k\right) \qquad \textit{(renommage de } i \textit{ en } k\textit{)} \\
&= \left(u_{n+1} + \sum_{k=m+1}^{n} u_k\right) - \left(u_m + \sum_{k=m+1}^{n} u_k\right) \\
&= u_{n+1} - u_m
\end{aligned}$$

Exo sur la somme des k^2

1.2.3 Technique 3 : regroupement de termes

Pour calculer une somme, il est parfois utile de la décomposer en plusieurs sommes plus simples.

Exemple 1 : ♥ Soit $n \geqslant 1$. Calculer $S_n = \sum_{k=0}^{2n} \min(k, n)$.

Exemple 2 : ♥ Soit $n \geqslant 1$. Calculer $T_n = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k k^2$.

2 Coefficients binomiaux

2.1 Définitions et premières propriétés

Définition (factorielle n)**.** *Soit $n \in \mathbb{N}$. on appelle « factorielle n »et on note $n!$ l'entier défini par*

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k = 1 \times 2 \times 3 \cdots \times (n-1) \times n.$$

Remarques.

- *Par définition, on a $(n+1)! = n! \times (n+1)$.*
- *$0!$ est un produit vide, donc $0! = 1$.*
- *$1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$.*
- *La suite $(n!)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ très rapidement ("plus vite" que $(e^n)_{n\in\mathbb{N}}$ par exemple).*

Deux exemples de produit classiques

▶ Produit des n premiers entiers pairs ♥ :

$$2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times 2(n-1) \times 2n = \prod_{k=1}^{n}(2k) = 2^n \prod_{k=1}^{n} k = 2^n \times n!$$

▶ Produit des entiers impairs entre 1 et $(2n+1)$ ♥ :

$$1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-1) \times (2n+1) = \frac{1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)(2n)(2n+1)}{2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times 2(n-1) \times 2n} = \frac{(2n+1)!}{2^n n!}.$$

Définition (Coefficients binomiaux)**.** *Soit $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [\![0, n]\!]$. On définit le coefficient binomial $\binom{n}{p}$ (lire « p parmi n ») par*

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Remarques.

- *Malgré cette définition avec une fraction d'entiers, $\binom{n}{p}$ est toujours un entier (voir plus loin).*
- *Lorsque $p \in \mathbb{Z}$ n'appartient pas à $[\![0, n]\!]$, on définit tout de même $\binom{n}{p}$ par* $\boxed{\binom{n}{p} = 0}$
- *On a toujours $\binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{1} = n$ et $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.*

De façon générale, le calcul pratique de $\binom{n}{p}$ mène toujours à des simplifications.

Ex : $\binom{6}{2} = \frac{6!}{2!4!} = \frac{\cancel{1 \times 2 \times 3 \times 4} \times 5 \times 6}{(1 \times 2)\cancel{(1 \times 2 \times 3 \times 4)}} = \frac{6 \times 5}{1 \times 2}.$

De même :

$$\binom{7}{3} = \frac{7 \times 6 \times 5}{1 \times 2 \times 3},$$

$$\binom{12}{4} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9}{1 \times 2 \times 3 \times 4} = \frac{\text{produit des 4 derniers entiers entre 1 et 12}}{\text{produit des 4 premiers}},$$

$$\binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \times 2 \times 3}.$$

Proposition (Formule de symétrie)**.** $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall p \in \mathbb{Z}$,

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$$

dem : Soit $n \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{Z}$. Alors

- si $p \notin [\![0, n]\!]$, c'est $0 = 0$, qui est vrai.
- si $p \in [\![0, n]\!]$, on écrit

$$\binom{n}{n-p} \underset{def}{=} \frac{n!}{(n-p)!(n-(n-p))!} = \frac{n!}{(n-p)!p!} = \binom{n}{p}$$

ce qui conclut.

Conséquences :

$$\binom{n}{n} \underset{sym}{=} \binom{n}{0} = 1$$

$$\binom{n}{n-1} \underset{sym}{=} \binom{n}{1} = n$$

$$\binom{n}{n-2} \underset{sym}{=} \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

et $\binom{6}{4} = \binom{6}{2} = \frac{6 \times 5}{1 \times 2}$; $\binom{7}{4} = \binom{7}{3} = \frac{7 \times 6 \times 5}{1 \times 2 \times 3}$; $\binom{12}{8} = \binom{12}{4} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9}{1 \times 2 \times 3 \times 4}$.

Théorème (Formule de Pascal ♥)**.** $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall p \in \mathbb{Z}$,

$$\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \binom{n}{p}.$$

dem : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in \mathbb{Z}$.

- si $p \notin [\![0, n]\!]$, l'égalité signifie $0 + 0 = 0$, ce qui est vrai.
- si $p = n$, c'est $1 + 0 = 1$, qui l'est aussi.
- si $p \in [\![0, n-1]\!]$, on écrit

$$\begin{aligned}\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} &\underset{def}{=} \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-1-(p-1)!)} + \frac{(n-1)!}{p!(n-p-1)!} \\ &= (n-1)! \left(\underbrace{\frac{1}{(p-1)!(n-p)!}}_{=:A} + \underbrace{\frac{1}{p!(n-p-1)!}}_{=:B} \right).\end{aligned}$$

Or $\frac{1}{(p-1)!} = \frac{p}{p \times (p-1)!} = \frac{p}{p!}$, donc $A = \frac{p}{p!(n-p)!}$.

De même, $\frac{1}{(n-p-1)!} = \frac{n-p}{(n-p)!}$, donc $B = \frac{n-p}{p!(n-p)!}$.

Finalement,

$$\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \frac{(n-1)!}{p!(n-p)!} \underbrace{\big(p + (n-p)\big)}_{=n} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \binom{n}{p}$$

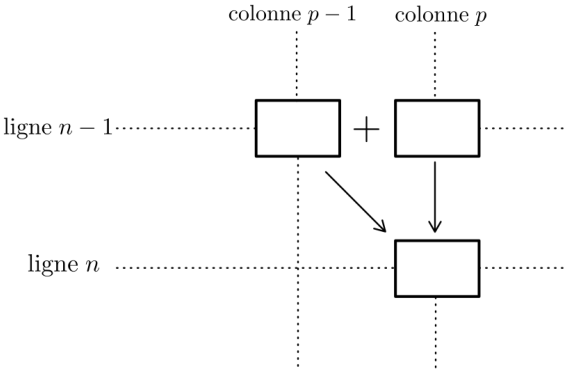
ce qui conclut.

Conséquence de cette formule : On peut calculer les coefficients binomiaux de proche en proche, en les disposant en pyramide. C'est le **triangle de Pascal**.

Principes pour remplir le tableau :

- $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$, donc la diagonale et la première colonne sont constituées de 1.
- On utilise la formule de Pascal, qui se traduit par

$$\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \binom{n}{p}$$



n \ p	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

n \ p	0	1	2	3	4	5	6
0	$\binom{0}{0}$						
1	$\binom{1}{0}$	$\binom{1}{1}$					
2	$\binom{2}{0}$	$\binom{2}{1}$	$\binom{2}{2}$				
3	$\binom{3}{0}$	$\binom{3}{1}$	$\binom{3}{2}$	$\binom{3}{3}$			
4	$\binom{4}{0}$	$\binom{4}{1}$	$\binom{4}{2}$	$\binom{4}{3}$	$\binom{4}{4}$		
5	$\binom{5}{0}$	$\binom{5}{1}$	$\binom{5}{2}$	$\binom{5}{3}$	$\binom{5}{4}$	$\binom{5}{5}$	
6	$\binom{6}{0}$	$\binom{6}{1}$	$\binom{6}{2}$	$\binom{6}{3}$	$\binom{6}{4}$	$\binom{6}{5}$	$\binom{6}{6}$

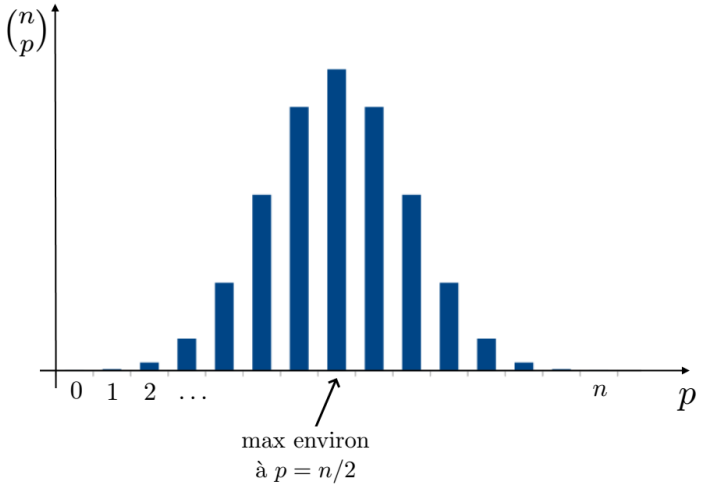
n \ p	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

Remarques.

- *La formule de Pascal permet de démontrer que les* $\binom{n}{p}$ *sont des entiers. En effet, chaque ligne s'obtient à partir de la précédente par des sommes. Il s'agit donc d'une récurrence où pour tout entier* n*,*

$$\mathcal{H}(n) = \text{" tous les coefficients de la ligne } n \text{ sont entiers "} = \text{" } \forall p \in \mathbb{Z},\ \binom{n}{p} \in \mathbb{N} \text{ "}$$

- *On retrouve la formule de symétrie !*
- *Si l'on fixe* n*, les* $\binom{n}{p}$ *varient (schématiquement) de la façon suivante :*



Théorème (Formule du binôme de Newton)**.** $\forall a, b \in \mathbb{C}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ *:*

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^p b^{n-p}.$$

dem : voir à la fin de ce document. L'idée est de fixer a et b et de faire une récurrence sur n, en utilisant dans l'hérédité :

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)^n \times (a+b)$$

La suite du calcul est une manipulation de sommes, avec utilisation finale de la formule de Pascal.

Exemples :

- $(a+b)^1 = a+b$
- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
- $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

On retrouve le triangle de Pascal !

Exercice : Soit $x \in \mathbb{R}$. Développer $(1+x)^5$.

Cf exo 6

Remarque. *Dans l'expression* $(a+b)^n$*, les rôles de* a *et* b *sont symétriques :* $(a+b)^n = (b+a)^n$*.*
C'est aussi le cas dans la somme $\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^p b^{n-p}$*, via le changement d'indice* $k = n-p \iff p = n-k$ *:*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k} a^{n-k} b^{n-(n-k)} \underset{sym}{=} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b^k a^{n-k}$$

Conseil : choisissez, entre les deux nombres a et b, celui que vous mettez à la puissance k et celui à la puissance $n-k$ comme cela vous arrange !

3 Sommes doubles

3.1 Somme double indexée par un rectangle

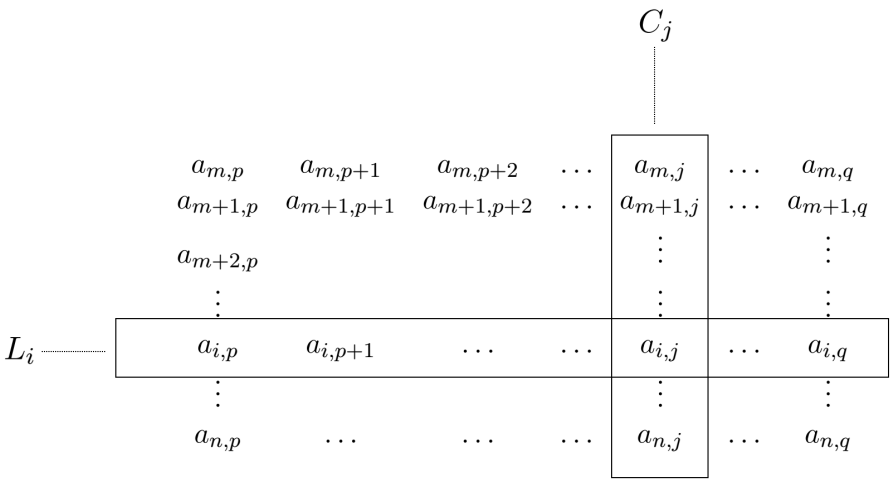
Soit $(a_{i,j})_{\substack{i \in [\![m,n]\!] \\ j \in [\![p,q]\!]}}$ une famille de nombres indexée par deux entiers : $i \in [\![m,n]\!]$ et $j \in [\![p,q]\!]$.
Le schéma suivant représente cette famille de nombres en prenant i comme indice de ligne et j comme indice de colonne.

$$\begin{array}{ccccccc}
a_{m,p} & a_{m,p+1} & a_{m,p+2} & \cdots & a_{m,q} \\
a_{m+1,p} & a_{m+1,p+1} & a_{m+1,p+2} & \cdots & a_{m+1,q} \\
a_{m+2,p} & & & & \vdots \\
\vdots & & & & \vdots \\
a_{n,p} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{n,q}
\end{array}$$

La somme de tous ces nombres est notée : $\displaystyle\sum_{\substack{m \leqslant i \leqslant n \\ p \leqslant j \leqslant q}} a_{i,j}$

Cette même somme peut être obtenue en sommant le tableau ligne par ligne, ou colonne par colonne. Plus précisément, si on note :

- pour tout $i \in [\![m,n]\!]$, $L_i := \displaystyle\sum_{j=p}^{q} a_{i,j}$ (la somme des coefficients sur la ligne i),
- pour tout $j \in [\![p,q]\!]$, $C_j := \displaystyle\sum_{i=m}^{n} a_{i,j}$ (la somme des coefficients sur la colonne j),


C_j
L_i
$a_{m,p}$ $a_{m,p+1}$ $a_{m,p+2}$ $\cdots$ $a_{m,j}$ $\cdots$ $a_{m,q}$
$a_{m+1,p}$ $a_{m+1,p+1}$ $a_{m+1,p+2}$ $\cdots$ $a_{m+1,j}$ $\cdots$ $a_{m+1,q}$
$a_{m+2,p}$
$a_{i,p}$ $a_{i,p+1}$ $\cdots$ $\cdots$ $a_{i,j}$ $\cdots$ $a_{i,q}$
$a_{n,p}$ $\cdots$ $\cdots$ $\cdots$ $a_{n,j}$ $\cdots$ $a_{n,q}$

alors on a :

$$\sum_{\substack{m \leqslant i \leqslant n \\ p \leqslant j \leqslant q}} a_{i,j} \;=\; \sum_{i=m}^{n} L_i \;=\; \sum_{j=p}^{q} C_j$$

En particulier, l'égalité des deux dernières sommes donne :

$$\boxed{\sum_{i=m}^{n} \sum_{j=p}^{q} a_{i,j} \;=\; \sum_{j=p}^{q} \sum_{i=m}^{n} a_{i,j}}$$

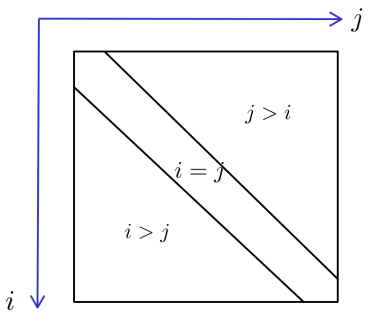
Conclusion : les indices i et j sont ici indépendants et les symboles $\displaystyle\sum_i$ et $\displaystyle\sum_j$ peuvent être intervertis directement.

3.2 Somme double indexée par un triangle

Soit $(a_{i,j})_{m\leqslant i\leqslant j\leqslant n}$ une famille de nombres indexée par deux entiers i et j appartenant à $[\![m,n]\!]$, mais uniquement pour les couples (i,j) tels que $\boxed{\mathbf{i\leqslant j}}$. Le schéma suivant représente cette famille de nombres en prenant i comme indice de ligne et j comme indice de colonne.

$$\begin{array}{ccccc} a_{m,m} & a_{m,m+1} & a_{m,m+2} & \cdots & a_{m,n} \\ & a_{m+1,m+1} & a_{m+1,m+2} & \cdots & a_{m+1,n} \\ & & a_{m+2,m+2} & & \vdots \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & a_{n,n} \end{array}$$

Remarque du professeur : bien comprendre que dans un tableau à double entrée, on a les trois zones suivantes :



La zone "$i\leqslant j$" est donc la zone supérieure droite, diagonale inclue.

La somme de ces nombres $a_{i,j}$ est notée :

$$\sum_{m\leqslant i\leqslant j\leqslant n} a_{i,j}$$

Cette somme peut aussi être obtenue en sommant les nombres du tableau ligne par ligne. Elle vaut alors :

$$\sum_{i=m}^{n}\sum_{j=\mathbf{i}}^{n} a_{i,j}$$

Explication : on somme toutes les lignes, donc l'indice i prend tous les indices entre m et n. En revanche, dans chaque ligne i, on ne prend pas toutes les colonnes, mais uniquement celles qui respectent la contrainte $i\leqslant j$. Autrement dit, on ne prend que les j **supérieurs à i**, c'est-à-dire les j entre i et n.

Enfin, la somme des nombres prise colonne par colonne donne :

$$\sum_{j=m}^{n}\sum_{i=m}^{\mathbf{j}} a_{i,j}$$

Explication : on somme sur toutes les colonnnes, donc l'indice j va de m à n. En revanche, dans chaque colonne j, on ne prend que les indices i qui vérifient la contrainte $i\leqslant j$.

Conclusion : les indices i et j ne sont pas indépendants l'un de l'autre, et l'interversion des symboles $\sum_i$ et $\sum_j$ demande de comprendre cette dépendance.
Globalement, le raisonnement est le suivant : pas le choix sur les bornes de la première somme. Qu'on choisisse de sommer par ligne ou par colonne, il faut toujours les prendre *toutes*. En revanche, le second indice s'adapte au premier.

Exercice : Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Calculer la quantité :

$$D_n=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n}\frac{i}{j}$$

Démonstration de la formule du binôme de Newton : $(\mathbf{a+b})^{\mathbf{n}} = \sum_{\mathbf{p=0}}^{\mathbf{n}} \binom{\mathbf{n}}{\mathbf{p}} \mathbf{a^p b^{n-p}}$

On fixe $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ et on fait une récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. Plus précisément, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$\mathcal{H}(n) \ : \ " \ (a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^p b^{n-p} \ "$$

— Initialisation : $(a+b)^0 = 1$ et $\sum_{p=0}^{0} \binom{0}{p} a^p b^{0-p} = 1 \times a^0.b^0 = 1$. Donc $\mathcal{H}(0)$ est vraie.

— Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $\mathcal{H}(n)$ est vraie. Pour prouver $\mathcal{H}(n+1)$, on écrit :

$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1} &= (a+b)^n \times (a+b) \\ &= \left(\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^p b^{n-p} \right) \times (a+b) \qquad \text{(d'après } \mathcal{H}(n)\text{)} \\ &= \underbrace{\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^{p+1} b^{n-p}}_{A_n} + \underbrace{\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^p b^{n+1-p}}_{B_n}\end{aligned}$$

Changement d'indice sur la somme A_n : $k = p+1 \iff p = k-1$.

$$\begin{aligned}A_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^k b^{n+1-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^k b^{n+1-k} \qquad \text{(rajout } k=0 \text{ car } \binom{n}{-1} = 0\text{)}\end{aligned}$$

Pour B_n, quitte à changer p en k et à rajouter le terme $k = n+1$ (qui ne change rien car $\binom{n}{n+1} = 0$), on a

$$B_n = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k}$$

Finalement :

$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1} \ = \ A_n + B_n &= \sum_{k=0}^{n+1} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) a^k b^{n+1-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} \qquad \text{(formule de Pascal)}\end{aligned}$$

ce qui montre $\mathcal{H}(n+1)$.

— Conclusion : $\mathcal{H}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.